

- [1] 座標平面上の原点を中心とする半径 2 の円を  $C_1$ , 中心の座標が  $(7, 0)$ , 半径 が 3 の円を  $C_2$  とする. さらに  $r$  を正の実数とするとき,  $C_1$  と  $C_2$  に同時に外接する円で, その中心の座標が  $(a, b)$ , 半径が  $r$  であるものを  $C_3$  とする. ただし, 2 つの円が外接するとは, それらが 1 点を共有し, 中心が互いの外部にあるときをいう.

(1)  $r$  の最小値は  $\boxed{(1)}$  であり,  $a$  の最大値は  $\boxed{(2)}$  となる.

(2)  $a$  と  $b$  は関係式

$$b^2 = \boxed{(3)} \boxed{(4)} \left( a + \boxed{(5)} \boxed{(6)} \right) (a - 4)$$

を満たす.

(3)  $C_3$  が直線  $x = -3$  に接するとき,  $a = \frac{\boxed{(7)} \boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}$ ,  $|b| = \frac{\sqrt{\boxed{(10)} \boxed{(11)} \boxed{(12)}}}{\boxed{(13)}}$

である.

(4) 点  $(a, b)$  と原点を通る直線と, 点  $(a, b)$  と点  $(7, 0)$  を通る直線が直交するとき,  $|b| = \frac{\boxed{(14)} \boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$  となる.

[2] 1 個のさいころを繰り返し投げ、出た目の数により以下の (a), (b) に従い得点を定める.

(a) 最初から 10 回連続して 1 の目が出た場合には、10 回目で投げ終えて、得点を 0 点とする.

(b)  $m$  を  $0 \leq m \leq 9$  を満たす整数とする. 最初から  $m$  回連続して 1 の目が出て、かつ  $m+1$  回目に初めて 1 以外の目  $n$  が出た場合には、続けてさらに  $n$  回投げたところで投げ終えて、1 回目から  $m+n+1$  回目までに出了目の数の合計を得点とする. ただし、最初から 1 以外の目が出た場合には  $m=0$  とする.

(1) 得点が 49 点であるとする. このとき、 $n = \boxed{(17)}$  となり、 $m$  の取り得る値の

範囲は  $\boxed{(18)} \leq m \leq \boxed{(19)}$  であり、得点が 49 点となる確率は  $\frac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}{6^{16}}$  で

ある. また、得点が 49 点で、さいころを投げる回数が 15 回以上である確率は  $\frac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{6^{16}}$  となる. さらに、得点が 49 点である条件のもとで、さいころ

を投げる回数が 14 回以下である条件付き確率は  $\frac{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}\boxed{(27)}}$  となる.

(2) さいころを投げる回数が 15 回以上である確率は  $\frac{\boxed{(28)}}{6^{10}}$  となる. ゆえに、さい

ころを投げる回数が 14 回以下である条件のもとで、得点が 49 点となる条件付き確率は、 $k = \boxed{(29)}$  において  $\frac{1}{6^k(6^{10} - \boxed{(30)})}$  となる.

(3) 得点が正の数で、かつ、さいころを投げる回数が 14 回以下である条件のもとで、得点が 49 点となる条件付き確率は、 $l = \boxed{(31)}$  において  $\frac{1}{6^l(6^{10} - \boxed{(32)})}$  となる.

[3] 数列  $\{a_n\}$  に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく.  $\{a_n\}$  は,  $a_2 = 1, a_6 = 2$  および

$$(*) \quad S_n = \frac{(n-2)(n+1)^2}{4} a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする.

(1)  $a_1 = -\boxed{(33)}$  である.  $(*)$  で  $n = 4, 5$  とすると,  $a_3 + a_4$  と  $a_5$  の関係が 2 通り定まり,  $a_5 = \boxed{(34)}$  と求まる. さらに  $(*)$  で  $n = 3$  として,  $a_3 = \boxed{(35)}\boxed{(36)}$ ,  $a_4 = \boxed{(37)}\boxed{(38)}$  と求まる.

(2)  $n \geq 2$  に対して  $a_n = S_n - S_{n-1}$  であるから,  $(*)$  とあわせて

$$\left(n - \boxed{(39)}\right) \left(n + \boxed{(40)}\right)^2 a_{n+1} = \left(n^3 - \boxed{(41)}n^2 + \boxed{(42)}\right) a_n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

ゆえに,  $n \geq 3$  ならば  $\left(n + \boxed{(43)}\right) a_{n+1} = \left(n - \boxed{(44)}\right) a_n$  となる. そこで,  $n \geq 3$  に対して  $b_n = (n-r)(n-s)(n-t)a_n$  とおくと, 漸化式

$$b_{n+1} = b_n \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

が成り立つ. ただしここに,  $r < s < t$  として  $r = \boxed{(45)}$ ,  $s = \boxed{(46)}$ ,  $t = \boxed{(47)}$  である. したがって,  $n \geq 4$  に対して

$$a_n = \frac{\boxed{(48)} a_3}{(n-r)(n-s)(n-t)}$$

となる. この式は  $n = 3$  のときも成立する.

(3)  $n \geq 2$  に対して

$$S_n = \frac{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\left(n + \boxed{(51)}\right)\left(n - \boxed{(52)}\right)}{n\left(n - \boxed{(53)}\right)}$$

であるから,  $S_n \geq 59$  となる最小の  $n$  は  $n = \boxed{(54)}\boxed{(55)}$  である.

[4]  $k$  を実数の定数とする．実数  $x$  は不等式

$$(\star) \qquad 2\log_5 x - \log_5(6x - 5^k) < k - 1$$

を満たすとする．

(1) 不等式  $(\star)$  を満たす  $x$  の値の範囲を， $k$  を用いて表せ．

(2)  $k$  を自然数とする． $(\star)$  を満たす  $x$  のうち奇数の個数を  $a_k$  とし

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく． $a_k$  を  $k$  の式で表し，さらに  $S_n$  を  $n$  の式で表せ．

(3) (2) の  $S_n$  に対して， $S_n + n$  が 10 桁の整数となるような自然数  $n$  の値を求めよ．なお，必要があれば  $0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$  を用いよ．

- [5] 空間の2点  $O$  と  $A$  は  $|\overrightarrow{OA}| = 2$  を満たすとし、点  $A$  を通り  $\overrightarrow{OA}$  に直交する平面を  $H$  とする。平面  $H$  上の三角形  $ABC$  は、正の実数  $a$  に対し

$$|\overrightarrow{AB}| = 2a, \quad |\overrightarrow{AC}| = 3a, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$$

を満たすとする。ただし、 $\vec{u} \cdot \vec{v}$  はベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の内積を表す。

- (1)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  の値を求めよ。

さらに、線分  $AB$  の平面  $H$  上にある垂直二等分線を  $\ell$ 、線分  $AC$  を  $2:1$  に内分する点を通り、線分  $AC$  に直交する  $H$  上の直線を  $m$  とする。また、 $\ell$  と  $m$  の交点を  $P$  とする。

- (2) ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  を、実数  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて  $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$  と表すとき、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値をそれぞれ求めよ。

- (3) 空間の点  $Q$  は  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$  を満たすとする。直線  $PQ$  が、点  $O$  を中心とする半径  $2$  の球  $S$  に接しているとき、 $|\overrightarrow{AP}|$  の値および  $a$  の値を求めよ。さらに、直線  $\ell$  上の点  $R$  を、直線  $QR$  が  $S$  に接し、 $P$  とは異なる点とする。このとき  $\triangle APR$  の面積を求めよ。

[6]  $F(x)$  は実数を係数とする  $x$  の 3 次式で,  $x^3$  の項の係数は 1 であり,  $y = F(x)$  で定まる曲線を  $C$  とする.  $\alpha < \beta$  を満たす実数  $\alpha, \beta$  に対して,  $C$  上の点  $A(\alpha, F(\alpha))$  における  $C$  の接線を  $L_\alpha$  とするとき,  $C$  と  $L_\alpha$  との  $A$  以外の共有点が  $B(\beta, F(\beta))$  であるとする. さらに,  $B$  における  $C$  の接線を  $L_\beta$  とし,  $C$  と  $L_\beta$  との  $B$  以外の共有点を  $(\gamma, F(\gamma))$  とする.

- (1) 接線  $L_\alpha$  の方程式を  $y = \ell_\alpha(x)$  とし,  $G(x) = F(x) - \ell_\alpha(x)$  とおく. さらに, 曲線  $y = G(x)$  上の点  $(\beta, G(\beta))$  における接線の方程式を  $y = m(x)$  とする.  $G(x)$  および  $m(x)$  を, それぞれ  $\alpha, \beta$  を用いて因数分解された形に表せ. 必要ならば  $x$  の整式で表される関数  $p(x), q(x)$  とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}' = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

を用いてもよい.

- (2) 接線  $L_\beta$  の方程式は, (1) で定めた  $\ell_\alpha(x), m(x)$  を用いて,  $y = \ell_\alpha(x) + m(x)$  で与えられることを示せ. さらに,  $\gamma$  を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ.
- (3) 曲線  $C$  および  $L_\beta$  で囲まれた図形の面積を  $S$  とする.  $S$  を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ. さらに  $\alpha, \beta$  が  $-1 < \alpha < 0$  かつ  $1 < \beta < 2$  を満たすとき,  $S$  の取り得る値の範囲を求めよ. 必要ならば  $r < s$  を満たす実数  $r, s$  に対して成り立つ公式

$$\int_r^s (x-r)(x-s)^2 dx = \frac{1}{12}(s-r)^4$$

を用いてもよい.